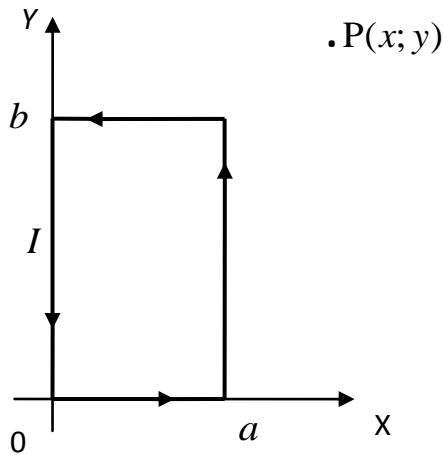


## Контрольна робота №3 «Магнітне поле струму».



**Завдання 1.** У координатній площині ХОУ у вакуумі розміщена прямокутна рамка із сторонами  $(a, b)$  та струмом  $I$ , рис. 1.

За даними таблиці варіантів Табл. 1 розрахувати в заданій точці  $P(x; y)$  вектори індукції магнітного поля, що створюється кожною стороною рамки  $\vec{B}_i$  та рамкою в цілому  $\vec{B}$ . Вказати на рисунку напрями всіх векторів.

Рис. 1

Табл. 1

Варіант	$I, A$	$a, \text{ см}$	$b, \text{ см}$	$(x;y), \text{ см.}$ Рівень 1	$(x;y), \text{ см.}$ Рівень 2
1	95	2	10	0; -5	
2	90	40	35	20; 40	
3	80	3	9	-1; 9	
4	70	50	40	-10; 20	
5	60	4	8	2; 4	
6	50	30	45	45; 45	
7	40	5	7	5; 10	
8	30	35	50	30; 25	
9	20	8	4	1; 2	
10	10	15	40	15; -10	
11	15	9	3	-10; 0	
12	20	10	35	5; 5	
13	25	6	10	3; 8	
14	30	12	8	10; 4	
15	35	5	30	10; 0	
16	40	15	15	-5; -5	
17	45	30	45	15; -30	
18	50	14	10	-10; 5	
19	55	30	15	20; -15	
20	60	8	8	1; 1	
21	65	20	10	-10; 5	
22	70	15	40	0; -10	
23	75	40	40	10; 30	
24	80	10	35	15; 35	
25	85	50	25	-30; 0	
26	90	4	10	2; -2	
27	95	45	30	0; 50	
28	10	20	45	10; 50	
29	80	10	10	9; 1	
30	60	25	50	25; -25	

---

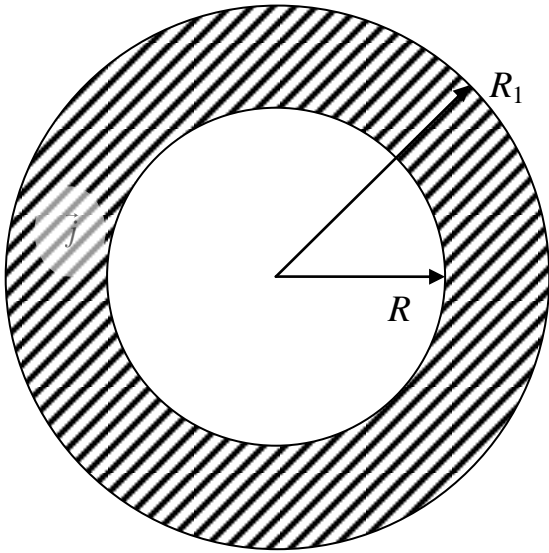


Рис.3.

**Завдання 3.** Уздовж нескінченного порожнистого циліндра з внутрішнім радіусом  $R$  та зовнішнім  $R_1 = 3R$  (рис. 3) йде струм, що розподілений по площі перерізу циліндра рівномірно з постійною густиною  $\vec{j} = \vec{j}_0$  (рівень 1) або аксіально симетрично з густиною  $\vec{j} = \vec{j}(r)$  (рівень 2).

1. Отримати аналітичні вирази індукції магнітного поля циліндра  $\vec{B} = B \vec{r}$  у всьому просторі.

2. За даними таблиці варіантів Табл. 3 розрахувати таблицю значень та побудувати графік  $B \vec{r}$  в інтервалі  $0 \leq r \leq 6R$ .

Табл. 3

Варіант	$j(r)$	$j_0, \text{A/мм}^2$	$R, \text{см}$
1		0,1	5
2		0,2	10
3		0,3	15
4		0,4	20
5		0,5	25
6		0,6	20
7		0,7	15
8		0,8	10
9		0,9	5
10		1,0	4
11		1,0	6
12		0,9	8
13		0,8	10
14		0,7	12
15		0,6	14
16		0,5	16
17		0,4	18
18		0,3	20
19		0,2	22
20		0,1	24
21		0,2	25
22		0,3	20
23		0,4	15
24		0,5	10
25		0,4	15
26		0,7	10
27		0,8	15
28		0,9	20
29		1,0	25
30		1,5	25

Примітка: Для завдання 1-го рівня прийняти  $j = j_0$  (колонку  $j(r)$  ігнорувати).

## **Вимоги до виконання**

1. Кожен студент виконує роботу відповідного рівня складності, який призначається викладачем.
2. Завдання оформлюється на окремих аркушах формату А-4 з одного боку і включає:
  - титульну сторінку, на котрій вказується тема роботи, варіант і рівень складності завдання, курс, прізвище й ініціали студента, який виконав роботу, шифр групи та посада й ініціали викладача, який перевірів роботу;
  - умову та параметри завдання, згідно з таблицею варіантів;
  - виконання завдання по суті.
3. Об'єм завдань за рівнями складності:
  - рівні 1, 2 – виконати завдання 1 та 3;
  - рівень 3 – виконати завдання 2 та 4.

## Вказівки з виконання.

**Завдання 1.** Завдання виконується на основі закону Біо-Савара та принципу суперпозиції. Формула індукції магнітного поля прямого відрізка струму:

$$B = \frac{k_m I}{R} \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2, \text{ де } k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}. \quad (1.1)$$

Розрахунок виконуємо в такій послідовності (для **прикладу** приймемо  $I=100$  А,  $a = 60$  см,  $b = 40$  см,  $x = 20$  см,  $y = 20$  см і розрахуємо поле сторони 3).

1. Для кожної із сторін робимо окремий рисунок (тут рис. 1-3), на якому позначаємо:

- напрям струму  $I$ ;
- координати кінців даної сторони та точки  $P$ , а також відстань  $R$ ;
- кути  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ , звернувши увагу на те, що вони відраховуються від напрямку струму до напрямку на точку  $P$ .

2. Обчислюємо відстань  $R = b - y = 20$  см.

3. Через відповідні відрізки обчислюємо косинуси кутів:

$$\cos \alpha_1 = \frac{a - x}{\sqrt{(a - x)^2 + R^2}} = \frac{40}{\sqrt{40^2 + 20^2}} = 0,894;$$

$$\cos \alpha_2 = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} = -\frac{20}{\sqrt{20^2 + 60^2}} = -0,707.$$

4. Підставляємо отримані числа та величину струму в розрахункову формулу (1.1) і знаходимо величину індукції поля  $B_3$ , створюваного даною стороною рамки:

$$B_3 = \frac{10^{-7} \cdot 100}{0,2} (0,894 + 0,707) = 8,00 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 0,8 \text{ мТл}.$$

5. За правилом правого гвинта визначаємо напрям вектора  $\vec{B}_3$  («на нас») і показуємо його на рисунку (кружечок із крапкою).

6. Знаходимо результуюче поле  $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$ , при цьому поля, які напрямлені «до нас» беремо із знаком «+», а при протилежному напрямі – із знаком «-». За знаком результату визначаємо напрям вектора  $\vec{B}$  і показуємо його на вихідному рис. 1 кружечком із крапкою або з косим хрестиком усередині.

---

– **Завдання 3.** Оскільки струм у циліндрі розподілений аксіально симетрично, лінії магнітного поля мають форму кіл із центрами на осі циліндра (доведіть). При цьому в усіх точках такого кола величина індукції  $B = const$ . Тому розрахунок у будь-якій точці зручно проводити за допомогою теореми про циркуляцію вектора  $\vec{B}$ , взявши за контур інтегрування коло з центром на осі системи, яке проходить через цю точку (зробіть рисунок). Розрахунки виконуємо в такій послідовності.

– Знаходимо аналітичні вирази  $B(r)$ , для чого записуємо рівняння теореми про циркуляцію для указанного кола з урахуванням осьової симетрії поля:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{s} \Rightarrow B \oint_L dl = \mu_0 \int_S j ds \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_S j ds. \quad (3.1)$$

Тут ураховано, що при обході контуру по полю вектори в лівій частині так само, як і в правій, є співнапрямленими.

Далі обчислюємо праву частину (3.1), в якій інтеграл  $I = \int_S \vec{j} d\vec{s}$  дорівнює

величині струму, що проходить крізь коло радіуса  $r$ . Цей інтеграл залежить від радіуса кола  $r$ , тобто від того, в якій області простору шукаємо поле. Зокрема, при  $r < R$   $I = 0$ , оскільки в цій області скрізь  $j = 0$ . Отже, в порожнині магнітного поля немає:  $B = 0$ .

В області  $R \leq r \leq R_1$  (тіло циліндра) інтеграл  $I$  дорівнює величині струму, що проходить крізь кільце із внутрішнім радіусом  $R$  і зовнішнім  $r$ . У завданні першого рівня складності  $j = j_0$ , то ж  $I = j_0 \cdot \pi (r^2 - R^2)$  і, відповідно до (3.1),

$$B(r) = \frac{\mu_0 j_0 (r^2 - R^2)}{2r}.$$

Для зручності подальших розрахунків варто записати:

$$B(r) = \frac{B_0}{2} \left( \frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right), \quad \text{де } B_0 = \mu_0 j_0 R. \quad (3.2)$$

При радіусі контуру інтегрування  $r > R_1$  (зона поза циліндром)  $j = 0$ . Тому для цієї області, незалежно від  $r$ ,  $I = j_0 \cdot \pi (R_1^2 - R^2) = 8\pi j_0 R^2$ . Відповідно,

$$B(r) = \frac{\mu_0 j_0 (R_1^2 - R^2)}{2r} = \frac{4\mu_0 j_0 R^2}{r}, \quad \text{або } B(r) = 4B_0 \frac{R}{r}. \quad (3.3)$$

У другому рівні складності величина  $j$  залежить від  $r$ , тому струм  $I$  визначається інтегруванням. Для цього вибираємо елементарну площадку  $ds$  у формі кільця довільного радіуса  $r'$  і ширини  $dr'$ , тоді  $ds = 2\pi r' dr'$ . Підставляючи під інтеграл цей вираз та вираз  $j(r)$  із табл. 4.3, отримуємо вираз  $I$ . Для прикладу візьмемо  $j(r) = j_0 R/r^2$ , тоді:



$$I = \int_s j ds = 2\pi j_0 R^2 \int_R^r \frac{dr'}{r'} \Rightarrow I = 2\pi j_0 R^2 \ln \frac{r}{R}. \quad (3.4)$$

Підставивши цей вираз в (3.1), отримуємо

$$B r = \mu_0 j_0 R^2 \frac{1}{r} \ln \frac{r}{R},$$

або

$$B r = B_0 \frac{R}{r} \ln \frac{r}{R}. \quad (3.5)$$

При радіусі контуру інтегрування  $r > R_1$  (зона поза циліндром)  $j = 0$ . Тому для цієї області в інтегралі (3.2) верхня границя завжди дорівнює  $R_1 = 3R$ , і струм  $I = 2\pi j_0 R^2 \ln 3$ . Відповідно, з (3.1) маємо:

$$B r = \frac{\mu_0 j_0 R^2 \ln 3}{r} \quad \text{або} \quad B r = B_0 \ln 3 \cdot \frac{R}{r}. \quad (3.6)$$

- Згідно із заданими значеннями  $j_0$  і  $R$  обчислюємо величину  $B_0 = \mu_0 j_0 R$  і записуємо числові формули (3.2) і (3.3). Для **прикладу** приймемо  $j_0 = 2 \frac{A}{\text{мм}^2}$ ,  $R = 5$  см, і перший рівень складності. Тоді  $B_0 = 126$  мТл і

$$B r = 0 \quad \text{при} \quad r < R;$$

$$B r = 63 \left( \frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right), \text{ мТл} \quad \text{при} \quad R \leq r \leq 3R; \quad (3.7)$$

$$B r = 502 \frac{R}{r}, \text{ мТл} \quad \text{при} \quad r > 3R.$$

- Розраховуємо з розумним кроком (наприклад, 1,5 см) і заносимо до таблиці значення  $B r$ . Примітка. При розрахунках за формулами (3.7) величини  $r$  і  $R$  зручно брати в см.
- За даними таблиці значень на міліметровому папері або за допомогою комп'ютера будуємо графік  $B r$ .

Примітка. На таблиці та графіку повинна бути відображена вся необхідна інформація: позначення величин та одиниць вимірювання в таблиці й на осях графіка, розмічена координатна сітка, тощо.