

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

**Збірник завдань до  
домашньої контрольної роботи (ДКР)  
з дисципліни «Загальна фізика»**

розділ «Динаміка матеріальної точки»

*Рекомендовано Методичною радою НТУУ „КПІ”*

Київ

НТУУ ”КПІ”

2011

Збірник завдань до домашньої контрольної роботи (ДКР) з дисципліни «Загальна фізика», розділ «Динаміка матеріальної точки» для студентів технічних напрямків підготовки. /Уклад. І. М. Репалов. – К.: НТУУ „КПІ”, 2011. – 19с.

*Гриф надано Методичною радою НТУУ „КПІ”*

( )

Навчальне видання

Збірник завдань  
до домашньої контрольної роботи (ДКР)  
з дисципліни «Загальна фізика»  
розділ «Динаміка матеріальної точки»

Укладач: Репалов Ігор Миколайович, канд. фіз. - мат. наук, доц.

Відповідальний

редактор В. М. Локтев, академік НАНУ, доктор фіз. - мат. наук

Рецензент Л. П. Гермаш, доктор фіз. - мат. наук, проф.

За редакцією укладача

**Збірник завдань до домашньої контрольної роботи (ДКР)**

**з дисципліни «Загальна фізика», розділ «Динаміка матеріальної точки.»**

для студентів технічних напрямків підготовки.

На тіло маси  $m$ , що знаходиться в полі сили тяжіння на похилій площині  $AB$  діє зовнішня сила  $F$ , яка спрямована вздовж  $AB$ . Тіло починає рух з точки  $A$  з початковою швидкістю  $V_A$  і протягом часу  $t_1$  проходить відстань  $l$  до точки відриву  $B$  (див. рис. 1). Рівняння ділянки  $AB$  в площині руху задано рівнянням  $y_1(x)$ . Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $\mu$ .

В точці відриву  $B$  тіло має швидкість  $V_B$ . Подальший рух тіла на ділянці  $BC$  є вільним падінням в полі сили тяжіння протягом часу  $t_2$  с. В точку  $C$  тіло падає зі швидкістю  $V_C$ . Поверхня, на яку тіло падає, в площині руху задана рівнянням  $y_2(x)$ .

Тіло вважати матеріальною точкою.

**Завдання:**

1. Зобразити на малюнку тіло на кожній ділянці руху і сили, які на нього діють.
2. Записати диференціальне рівняння руху (другий закон Ньютона) і інтегруючи його двічі, знайти всі параметри, які не вказані в табл.1.
3. Для всіх варіантів знайти рівняння траєкторії вільного падіння тіла на ділянці  $BC$   $y = y(x)$ .
4. Перевірити отримані результати за допомогою закону збереження енергії.
5. Зробити висновки, щодо виконання роботи і отриманих результатів.

Дані для виконання роботи взяти в табл. 1 у відповідності до свого варіанту. Всі величини в табл. 1 задані у системі [СІ]. Якщо  $F > 0$ , то сила спрямована від  $A$  до  $B$ , при  $F < 0$  - від  $B$  до  $A$ .

### Вказівки до виконання і оформлення роботи:

- Перед початком виконання роботи і розрахунків необхідно обов'язково вивчити теоретичний матеріал і розібрати приклади за підручниками, перелік яких наведений в розділі Література.
- Робота виконується українською або російською мовами на папері формату А4 з одного боку. Аркуші не зшиваються, а вкладаються у файл або папку.
- На титульному аркуші вказується назва університету, факультету, номеру групи, прізвище та ім'я студента, назва роботи, номер варіанту, рік.
- Нумерація сторінок – обов'язкова. На титулі номер не ставиться.
- Робота виконується в пакеті Word Windows. Як виняток, дозволяється написання від руки.
- Для побудови графіків та перевірки аналітичних обчислень бажано використовувати аналітичні пакети (MathCAD, Maple, Mathematica та інші).
- Графіки друкуються на принтері, або будуються на міліметровому папері формату А4.
- Всі аналітичні перетворення і обчислення наводяться повністю. У разі використання комп'ютерних математичних програм наводиться лістинг програм та таблиці значень для побудови графіків, якщо вони будуються на міліметровому папері.
- Виконана та належним чином у відповідності до наведеного прикладу оформлена робота здається в термін, вказаний викладачем.

табл. 1.

вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$m$	1	5	2	2	2	8	2	3	5	4	5	5	4	8	5
$\mu$	0.2	0.3	0.15	0.25	0.15	0.25	0.17	0.14	0.12	0.26	0.16	0.16	0.16	0.17	0.13
$F$	10	-2	-3	2.5	-1.5	2	-0.5	-4	10	4	7	-6.5	-7	2.5	6
$x_A$	-7	-5	-5	-4	-6	-2	-12	-40	-25	-100	-30	-60	-35	-15	-30
$y_A$															
$y_1(x)$	$0.1*x+10$	$-1.5*x+2.5$	$0.1*x+5$	$0.6*x+1.0$	$0.15*x+5$	$.6*x+2$	$-.1*x+5.0$	$-.3*x+5.0$	$.25*x+4$	$-.7*x+5.0$	$.35*x+4$	$.35*x+4$	$-.7*x+5.0$	$-.35*x+5.0$	$.15*x+4$
$l$															
$v_A$	6	5	11	3	8	0.1	7	8	14	12.5	18.5	35	2.4	2.5	10
$t_1$															
$v_B$															
$y_2(x)$	$3.0+x$	-3	$2.+x$	$-1.-1*x$	$2.+x$	$.5+.1*x$	$-1.-2*x$	-15.	$-.5*x$	-40	$-2.+45*x$	$-6.-45*x$	$-10.+5*x$	$-1.-7*x$	$-6.-45*x$
$t_2$															
$x_C$															
$y_C$															
$v_C$															

вар.№	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$m$	25	7	9	3.5	2.5	4.5	4.5	0.5	6	2.5	1.5	1.5	1.5	4.5	6
$\mu$	0.13	0.27	0.11	0.25	0.25	0.41	0.3645	0.28	0.28	0.3	0.13	0.13	0.13	0.23	0.23
$F$	-6	20	-7	2	2	3.5	2.5	4.5	-1.5	10	1	1	-1.8	-10	-22
$x_A$	-60	-80	-24	-34	-10	-25	-36	-200	-50	-30	-17	-20	-7	-15	-40
$y_A$															
$y_1(x)$	$0.11*x+4$	$-0.3222*x+5.0$	$.70545*x+4$	$-0.7*x+3$	$-0.6196*x+3$	$.581*x+4$	$0.34*x+4$	$.20185*x+4$	$.24269*x+4$	$-.1*x+3$	$-.1*x+3$	$-0.8*x+3$	$-0.989*x+3$	$-1.0*x+3$	$-0.14*x+3$
$l$															
$v_A$	20	23	22	2	2	2	25	25	25	12	8	8	4	14	15
$t_1$															
$v_B$															
$y_2(x)$	$-3.-.55*x$	-40	$-1.-1.55*x$	$-25.+3*x$	$-5.-.3*x$	$-10.+1.3*x$	$2.-1.3*x$	$-100.+1.3*x$	$-3.-.8*x$	-15	$-15.+2*x$	$-15.-1.1*x$	-7	-14	$-3.0-0.19*x$
$t_2$															
$x_C$															
$y_C$															
$v_C$															

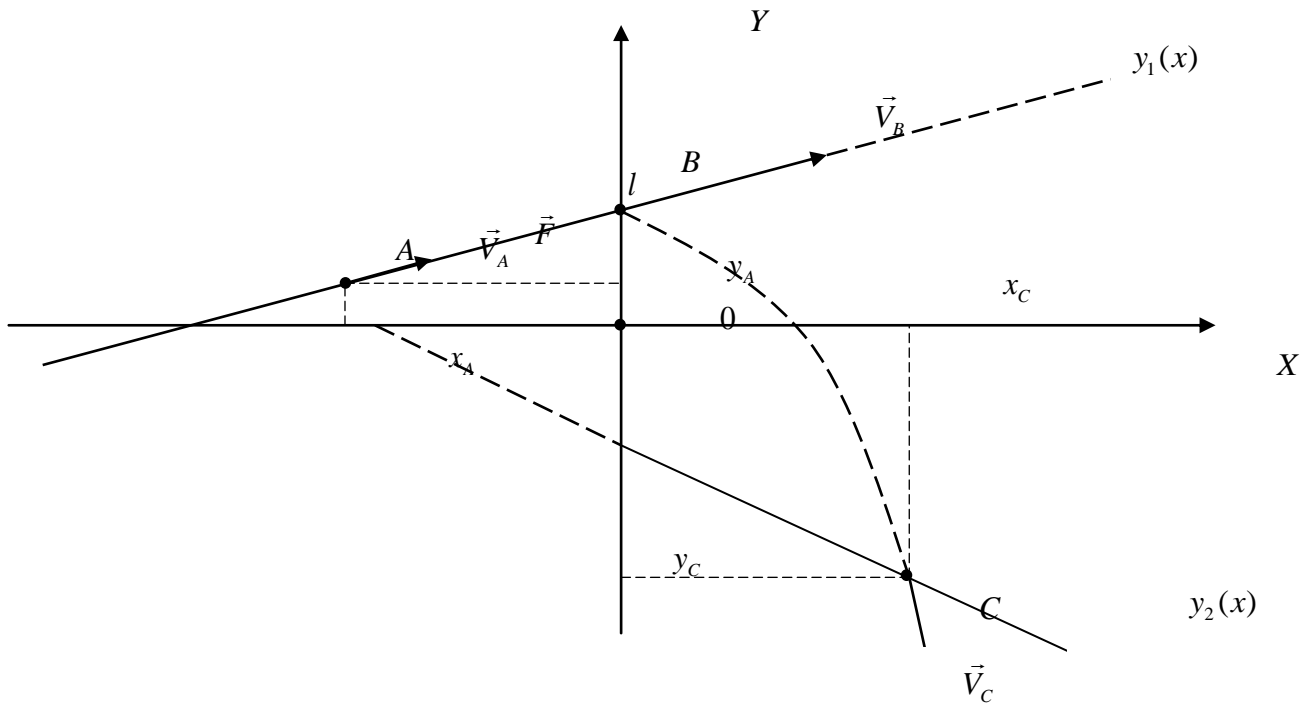


Рис.1.

## Стислі теоретичні відомості

### з розділу „Механіка матеріальної точки”.

- Положення матеріальної точки в просторі задається її радіус-вектором :

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — одиничні вектори (орти);  $x, y, z$  — координати точки.

- Кінематичні рівняння траєкторії руху в координатній формі:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t),$$

де  $t$  — час.

- Вектор переміщення точки за проміжок часу  $[t_1, t_2]$ :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}$$

- Миттєва швидкість матеріальної точки:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$$

де  $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$  - проєкції вектора швидкості на осі системи координат;

- Модуль вектора швидкості:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- Миттєве прискорення матеріальної точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \text{ де}$$



$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}$  - проекції вектора прискорення на осі системи координат;

- Нормальне, тангенціальне та повне прискорення:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}; \quad \vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}; \quad \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

$R$  – радіус кривизни траєкторії.

- Модуль повного прискорення точки:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

- Миттєва швидкість і радіус-вектор точки при довільному русі:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt; \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt.$$

- Шлях, який був пройдений точкою за проміжок часу  $[t_1, t_2]$ :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)| dt;$$

- Імпульс точки масою  $m$ , що рухається зі швидкістю  $\vec{v}$ :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- Основне рівняння динаміки руху матеріальної точки:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

- Основне рівняння динаміки для тіла незмінної маси (2 закон Ньютона):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} \quad \text{або} \quad m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}.$$

- Робота сили, що діє на матеріальну точку:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \text{ або } A = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt;$$

- Потужність сили, що діє на матеріальну точку:

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x \cdot v_x + F_y \cdot v_y + F_z \cdot v_z;$$

- Кінетична енергія матеріальної точки ( $v \ll c$ ):

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

- Зміна повної механічної енергії системи:

$$\Delta K + \Delta U = A_{\text{тр}} + A_{\text{зовн}}$$

- Зміна потенціальної енергії в полі сил тяжіння Землі:

$$\Delta U = mg\Delta h$$

### Приклад виконання роботи.

Дано:  $y_1 = x + 5$  (м),  $x_A = -4$  м,  $V_A = 1$  м/с

$F = 10$  Н,  $m = 1$  кг,  $y_2 = -2$  м,  $\mu = 0,1$

### Розв'язок:

Зобразимо на рис.2 всі діючі на тіло сили:

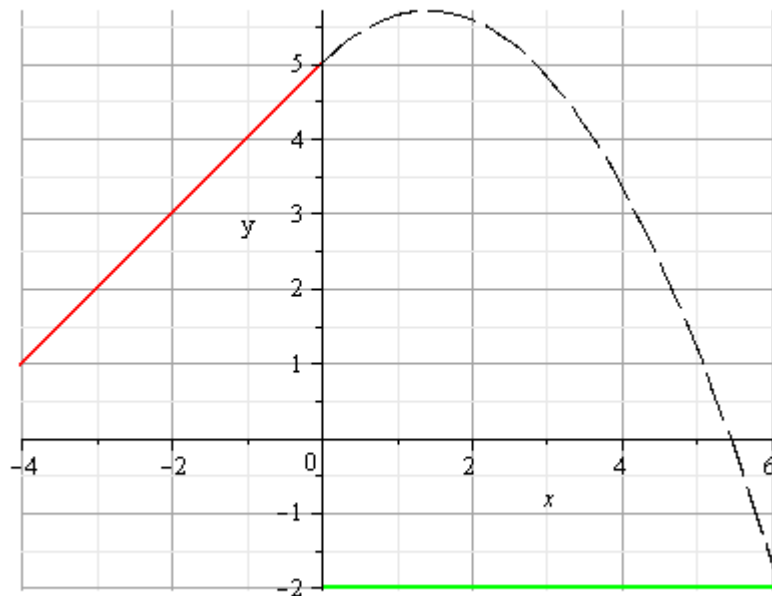


Рис.2

#### 1. Розглянемо рух тіла на проміжку $AB$ .

На тіло діють: сила тяжіння  $\vec{F}_T = m\vec{g}$ , та сила реакції поверхні  $\vec{R}$ . Вводимо допоміжну систему координат  $X_1AY_1$  з початком координат в точці  $A$ . При такому виборі системи координат, силу реакції поверхні  $\vec{R}$  доцільно розкласти на нормальну реакцію опору поверхні  $\vec{N}$  та силу тертя  $F_{тр} = \mu N$ , яка спрямована вздовж поверхні в напрямку протилежному руху.

Запишемо проекції другого закону Ньютона

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F} \quad (1.1)$$

на осі системи координат  $X_1A Y_1$ :

$$m \frac{dV_{1x}}{dt} = F - \mu N - mg \sin \alpha_1 \quad (1.2)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha_1 \quad (1.3)$$

Знаходячи з рівняння (1.3) нормальну реакцію опори  $N = mg \cos \alpha_1$ , підставляємо її в (1.2):

$$\frac{dV_{1x}}{dt} = \frac{F}{m} - g \cdot (\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1) \quad (1.4)$$

Кут нахилу площини  $y_1(x) = k_1x + b_1$  до горизонтальної осі  $OX$  знаходимо з кутового коефіцієнту  $k_1 = tg \alpha_1 = 1$ . Тоді:

$$\alpha_1 = \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$$

Так як  $tg \alpha_2 = k_2 = 0$ , то друга площина – горизонтальна, тобто  $\alpha_2 = 0$ .

Виконав інтегрування рівняння (1.4), отримаємо залежність швидкості точки від часу в напрямку  $AB$  (вісь  $X_1$ ):

$$V_{x1}(t) = \left(\frac{F}{m} - g(\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1)\right)t + C_1 \quad (1.5)$$

Інтегруючи в свою чергу рівняння (1.5), знаходимо залежність координати  $x_1$  від часу:

$$x_1(t) = \left(\frac{F}{m} - g(\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1)\right) \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \quad (1.6)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  використовуємо початкові умови задачі (координати і швидкості):  $x_1(0) = 0$  м та  $V_{x1} = V_A = 1$  м/с.

Складаючи рівняння (1.5) і (1.6) для моменту часу  $t=0$ , маємо:

$$C_1 = 1 \text{ м/с та } C_2 = 0 \quad (1.7)$$

Знайдемо довжину шляху  $l = AB$  вздовж площини  $y_1(x)$ . Так як координати точок  $A(-4;1)$  та  $B(0;5)$ , то за відомою з геометрії формулою -

$$l = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0+4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32} \approx 5,66 \text{ м} \quad (1.8)$$

Для моменту часу  $t_1$  коли тіло покидає похилу площину

$$x_1 = l \text{ та } V_{x1} = V_B$$

Враховуючи (1.7) і (1.8) в рівнянні (1.6), маємо рівняння для моменту часу  $t_1$ , коли тіло опиняється в точці  $B$ :

$$l = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{F}{m} - g \cdot (\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1) \right) \cdot t_1^2 + t_1$$

Підставляємо числові значення всіх величин:

$$\frac{1}{2} (10 - 9,81 (\sin \frac{\pi}{4} + 0,1 \cos \frac{\pi}{4})) t_1^2 + t_1 - 5,66 = 0$$

Приводимо рівняння к канонічному вигляду:

$$1,18 t_1^2 + t_1 - 5,66 = 0$$

і знаходимо розв'язки:

$$t_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1,18 \cdot 5,66}}{2 \cdot 1,18} = \frac{-1 \pm 5,27}{2} = \begin{cases} 1,81 \text{ с} \\ -3,14 \text{ с} \end{cases}$$

Оскільки час руху  $t_1$  - величина додатна, то  $t_1 = 1,81$  с.

Тепер з рівняння (1.5) знаходимо швидкість тіла в т.  $B$ :

$$V_B = V_{x1}(t_1) = \left(\frac{10}{1} \cdot 9,81 \cdot (\sin \frac{\pi}{4} + 0,1 \cdot \cos \frac{\pi}{4})\right) \cdot 2,14 = 5,27 \text{ м/с.}$$

2. Розглянемо рух тіла під дією сили тяжіння від точки  $B$  до  $C$ .

Проекції рівняння руху (1.1) на осі системи координат  $XOY$  мають вигляд:

$$\begin{cases} m \frac{dV_x}{dt} = 0 \\ m \frac{dV_y}{dt} = -F_T \end{cases} \quad (1.9)$$

Початкові умови:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ м}; y_0 = b_1 = 5 \text{ м}; \\ V_{x0} = V_B \cos \alpha_1 = 5,07 \cos \frac{\pi}{4} = 3,73 \text{ м/с} \\ V_{y0} = V_B \sin \frac{\pi}{4} = 3,73 \text{ м/с} \end{cases} \quad (1.10)$$

Інтегруємо рівняння (1.9) і отримаємо рівняння для горизонтальної і вертикальної компонент швидкості:

$$\begin{cases} V_x = C_3 \\ V_y = -gt + C_4 \end{cases} \quad (1.11)$$

Інтегруючи (1.11) вдруге, знаходимо залежність координат від часу:

$$\begin{cases} x = C_3 t + C_5 \\ y = -\frac{gt^2}{2} + C_4 t + C_6 \end{cases} \quad (1.12)$$

Для початкового моменту часу вільного падіння ( $t=0$ ), враховуючи (1.10), маємо:

$$C_3 = V_{x0} = 3,73 \text{ м/с}; C_4 = V_{y0} = 3,73 \text{ м/с}$$

$$C_5 = x_0 = 0 \text{ м}; C_6 = b_1 = 5 \text{ м}.$$

Тоді рівняння (1.11) і (1.12) приймають вигляд:

$$\begin{cases} V_x = V_{x0}; \\ V_y = V_{y0} - gt; \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} x = V_{x0}t \\ y = -\frac{gt^2}{2} + V_{y0}t + b_1 \end{cases} \quad (1.14)$$

В момент падіння в точку  $C$  вертикальна координата тіла

$$y_c = y_2 = -2 \text{ м}$$

Враховуючи це, з другого рівняння системи (1.14) знаходимо час вільного падіння  $t_2$ :

$$-2 = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t_2^2 + 3,73 \cdot t_2 + 5$$

$$4,905 \cdot t_2^2 - 3,73 \cdot t_2 - 7 = 0$$

$$t_2 = \frac{3,73 \pm \sqrt{3,73^2 + 4 \cdot 4,905 \cdot 7}}{2 \cdot 4,905} = \frac{3,73 \pm 12,30}{9,81} = 1,63 \text{ с}.$$

Тут врахований тільки додатній корінь (який має фізичний зміст).

Горизонтальну координату падіння знаходимо з першого рівняння (1.14):

$$x_c = V_{x0} \cdot t^2 = 3,73 \cdot 1,63 = 6,08 \text{ м}.$$

Швидкість тіла в точці  $C$

$$V_c = \sqrt{V_{xc}^2 + V_{yc}^2} = \sqrt{V_{x0}^2 + (V_{y0} - gt_2)^2} = \sqrt{3,73^2 + (3,73 - 9,81 \cdot 1,63)^2} = 12,85 \text{ м/с}.$$

**Заносимо всі знайдені величини до таблиці:**

$m$	$F$	$\mu$	$y_I(x)$	$x_A$	$y_A$	$l$	$V_A$	$t_I$	$V_B$	$y_2(x)$	$t_2$	$x_C$	$y_C$	$V_C$
1	10	0,1	$x+5$	-4	1	5,66	1	1,81	5,27	-2	1,63	6,08	-2	12,85

3. Рівняння траєкторії руху вільного падіння від точки  $B$  до точки  $C$  знайдемо виключаючи час  $t$  з системи рівнянь (1.14):

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{x}{V_{x0}} \\
 y(x) &= -\frac{g}{2V_{x0}^2} x^2 + \frac{V_{y0}}{V_{x0}} x + b_1 = \\
 &= -\frac{g}{2V_B^2 \cos^2 \alpha_1} + tg \alpha_1 \cdot x + b_1 = \\
 &= -\frac{9,81}{2 \cdot 5,07^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot x^2 + tg \frac{\pi}{4} \cdot x + 5 = \\
 &= -0,35x^2 + x + 5 \text{ м}
 \end{aligned}$$

4. Перевіримо отримані результати за допомогою закону збереження енергії:

$$\Delta K + \Delta U = A_{\text{зовн}} + A_{\text{тр}} \quad (1.15)$$

Зміна кінетичної енергії тіла:

$$\begin{aligned}
 \Delta K &= K_C - K_A = \frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = \\
 &= \frac{1}{2}(12,85^2 - 1^2) = 82,06 \text{ Дж}
 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Зміна потенціальної енергії тіла в полі сил тяжіння Землі:

$$\begin{aligned}
 \Delta U &= mg\Delta h = mg(y_C - y_A) = \\
 &= 1 \cdot 9,81 \cdot (-2 - 1) = -29,43 \text{ Дж}
 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Робота зовнішньої сили на відрізку шляху  $AB$ :



$$\begin{aligned}
 A_{зовн} &= \int_0^l \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot l \cdot \cos 0 = \\
 &= 10 \cdot 5,66 = 56,6 \text{ Дж}
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

Робота сили тертя:

$$\begin{aligned}
 A_{mp} &= \int_0^l \vec{F}_{mp} d\vec{r} = F_{mp} \cdot l \cdot \cos \pi = -\mu mg \cdot \cos \alpha_1 \cdot l = \\
 &= -0,1 \cdot 1 \cdot 9,81 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot 5,66 = -3,93 \text{ Дж}
 \end{aligned}
 \tag{1.19}$$

Підставляємо (1.16) - (1.19) в закон збереження енергії (1.15):

$$\begin{aligned}
 82,06 - 29,43 &= 56,6 - 3,93 \\
 52,63 &\approx 52,67
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

Ліва і права частина рівняння (1.20) співпадають в межах похибки, обумовленої округленням результатів при їх обчисленні. Це вказує на те, що задача була розв'язана вірно.

- Оригінальні висновки, щодо виконання роботи зробити самостійно.

## Література.

1. Иродов И.Е. Основные законы механики, М, 2002 (або 1983), Гл. 1-2,4;
2. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики, т. 1, Механіка, К, 2001, Гл. 1-4.
3. Савельев И.В. Курс физики, т.1, М, 1989, Гл. 1-3.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика т.1, М, 1979, Гл. 1-2, 4.

## Зміст

стор.

1. <u>Завдання</u>	<u>3</u>
2. <u>Вказівки до виконання роботи</u>	<u>4</u>
3. <u>Варіанти завдань</u>	<u>5</u>
4. <u>Стислі теоретичні відомості</u>	<u>8</u>
5. <u>Приклад виконання завдання</u>	<u>11</u>
6. <u>Література</u>	<u>18</u>
7. <u>Зміст</u>	<u>19</u>