

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

**Збірник завдань до
домашньої контрольної роботи (ДКР)
з дисципліни «Загальна фізика»**

розділ «Динаміка матеріальної точки»

Рекомендовано Методичною радою НТУУ „КПІ”

Київ

НТУУ ”КПІ”

2011

Збірник завдань до домашньої контрольної роботи (ДКР) з дисципліни «Загальна фізика», розділ «Динаміка матеріальної точки» для студентів технічних напрямків підготовки. /Уклад. І. М. Репалов. – К.: НТУУ „КПІ”, 2011. – 19с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ „КПІ”

Навчальне видання

Збірник завдань
до домашньої контрольної роботи (ДКР)
з дисципліни «Загальна фізика»
розділ «Динаміка матеріальної точки»

Укладач: Репалов Ігор Миколайович, канд. фіз. - мат. наук, доц.

Відповідальний

редактор В. М. Локтєв, академік НАНУ, доктор фіз. - мат. наук

Рецензент Л. П. Гермаш, доктор фіз. - мат. наук, проф.

За редакцією укладача

Збірник завдань до домашньої контрольної роботи (ДКР)

з дисципліни «Загальна фізика», розділ «Динаміка матеріальної точки.»

для студентів технічних напрямків підготовки.

На тіло маси m , що знаходиться в полі сили тяжіння на похилій площині AB діє зовнішня сила F , яка спрямована вздовж AB . Тіло починає рух з точки A з початковою швидкістю V_A і протягом часу t_1 проходить відстань l до точки відриву B (див. рис. 1). Рівняння ділянки AB в площині руху задано рівнянням $y_1(x)$. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює μ .

В точці відриву B тіло має швидкість V_B . Подальший рух тіла на ділянці BC є вільним падінням в полі сили тяжіння протягом часу t_2 с. В точку C тіло падає зі швидкістю V_C . Поверхня, на яку тіло падає, в площині руху задана рівнянням $y_2(x)$.

Тіло вважати матеріальною точкою.

Завдання:

1. Зобразити на малюнку тіло на кожній ділянці руху і сили, які на нього діють.
2. Записати диференціальне рівняння руху (другий закон Ньютона) і інтегруючи його двічі, знайти всі параметри, які не вказані в табл.1.
3. Для всіх варіантів знайти рівняння траєкторії вільного падіння тіла на ділянці BC $y = y(x)$.
4. Перевірити отримані результати за допомогою закону збереження енергії.
5. Зробити висновки, щодо виконання роботи і отриманих результатів.

Дані для виконання роботи взяти в табл. 1 у відповідності до свого варіанту. Всі величини в табл. 1 задані у системі [СІ]. Якщо $F > 0$, то сила спрямована від A до B , при $F < 0$ - від B до A .

Вказівки до виконання і оформлення роботи:

- Перед початком виконання роботи і розрахунків необхідно обов'язково вивчити теоретичний матеріал і розібрати приклади за підручниками, перелік яких наведений в розділі Література.
- Робота виконується українською або російською мовами на папері формату А4 з одного боку. Аркуші не зшиваються, а вкладаються у файл або папку.
- На титульному аркуші вказується назва університету, факультету, номеру групи, прізвище та ім'я студента, назва роботи, номер варіанту, рік.
- Нумерація сторінок – обов'язкова. На титулі номер не ставиться.
- Робота виконується в пакеті Word Windows. Як виняток, дозволяється написання від руки.
- Для побудови графіків та перевірки аналітичних обчислень бажано використовувати аналітичні пакети (MathCAD, Maple, Mathematica та інші).
- Графіки друкуються на принтері, або будуються на міліметровому папері формату А4.
- Всі аналітичні перетворення і обчислення наводяться повністю. У разі використання комп'ютерних математичних програм наводиться лістинг програм та таблиці значень для побудови графіків, якщо вони будуються на міліметровому папері.
- Виконана та належним чином у відповідності до наведеного прикладу оформлена робота здається в термін, вказаний викладачем.

табл. 1.

вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m	1	5	2	2	2	8	2	3	5	4	5	5	4	8	5
μ	0.2	0.3	0.15	0.25	0.15	0.25	0.17	0.14	0.12	0.26	0.16	0.16	0.16	0.17	0.13
F	10	-2	-3	2.5	-1.5	2	-0.5	-4	10	4	7	-6.5	-7	2.5	6
x_A	-7	-5	-5	-4	-6	-2	-12	-40	-25	-100	-30	-60	-35	-15	-30
y_A															
$y_1(x)$	$0.1*x+10$	$-1.5*x+2.5$	$0.1*x+5$	$0.6*x+1.0$	$0.15*x+5$	$.6*x+2$	$-1*x+5.0$	$-.3*x+5.0$	$.25*x+4$	$-.7*x+5.0$	$.35*x+4$	$.35*x+4$	$-.7*x+5.0$	$-.35*x+5.0$	$.15*x+4$
l															
v_A	6	5	11	3	8	0.1	7	8	14	12.5	18.5	35	2.4	2.5	10
t_1															
v_B															
$y_2(x)$	$3.0+x$	-3	$2.+x$	$-1.-1*x$	$2.+x$	$.5+.1*x$	$-1.-2*x$	-15.	$-.5*x$	-40	$-2.+45*x$	$-6.-45*x$	$-10.+5*x$	$-1.-7*x$	$-6.-45*x$
t_2															
x_C															
y_C															
v_C															

вар.№	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m	25	7	9	3.5	2.5	4.5	4.5	0.5	6	2.5	1.5	1.5	1.5	4.5	6
μ	0.13	0.27	0.11	0.25	0.25	0.41	0.3645	0.28	0.28	0.3	0.13	0.13	0.13	0.23	0.23
F	-6	20	-7	2	2	3.5	2.5	4.5	-1.5	10	1	1	-1.8	-10	-22
x_A	-60	-80	-24	-34	-10	-25	-36	-200	-50	-30	-17	-20	-7	-15	-40
y_A															
$y_1(x)$	$0.11*x+4$	$-0.3222*x+5.0$	$.70545*x+4$	$-0.7*x+3$	$-.6196*x+3$	$.581*x+4$	$0.34*x+4$	$.20185*x+4$	$.24269*x+4$	$-.1*x+3$	$-.1*x+3$	$-0.8*x+3$	$-0.989*x+3$	$-1.0*x+3$	$-0.14*x+3$
l															
v_A	20	23	22	2	2	2	25	25	25	12	8	8	4	14	15
t_1															
v_B															
$y_2(x)$	$-3.55*x$	-40	$-1.155*x$	$-25.3*x$	$-5.3*x$	$-10.13*x$	$2.13*x$	$-100.13*x$	$-3.8*x$	-15	$-15.2*x$	$-15.11*x$	-7	-14	$-3.0-0.19*x$
t_2															
x_C															
y_C															
v_C															

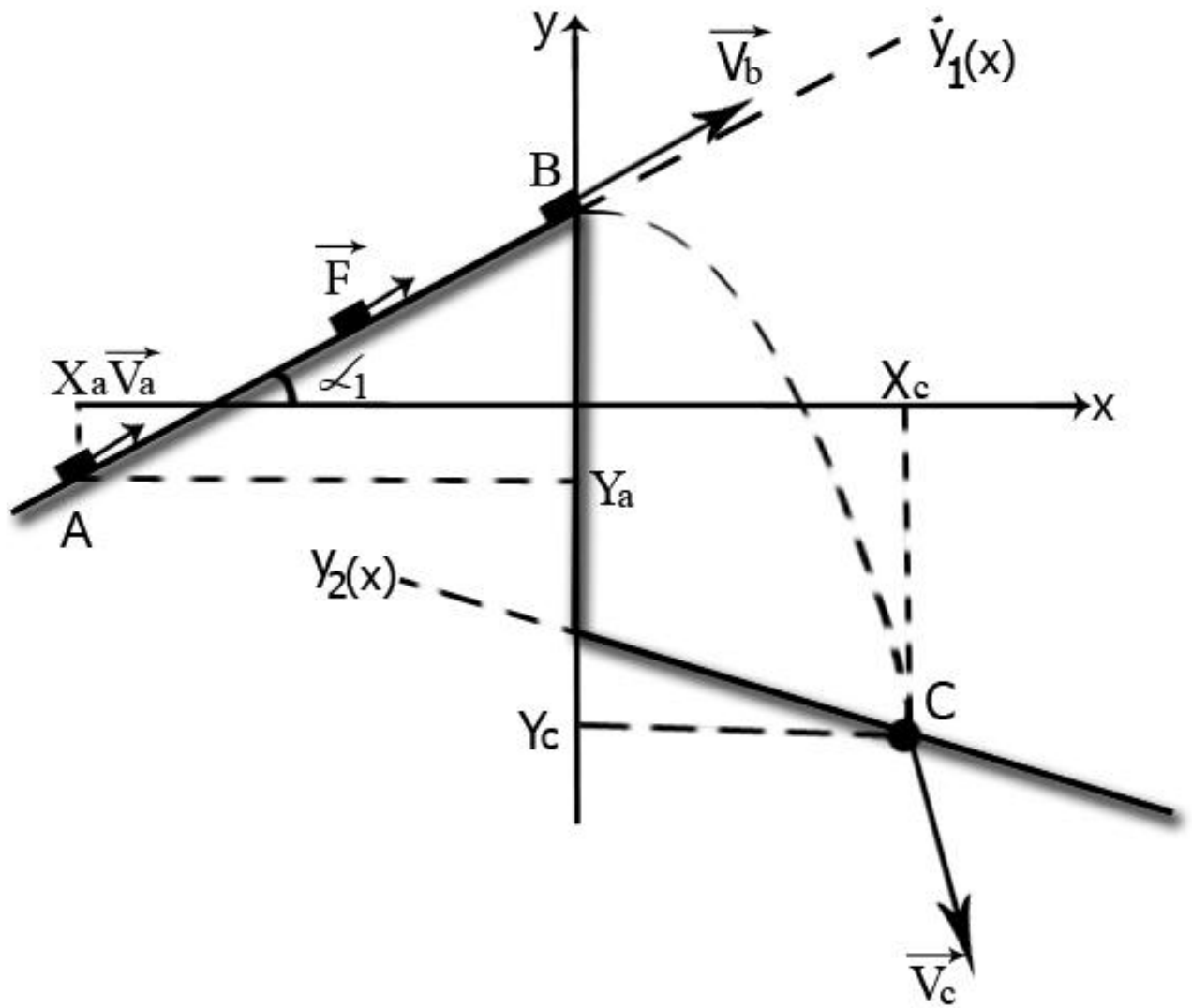


Рис.1.

Стислі теоретичні відомості

з розділу „Механіка матеріальної точки”.

- Положення матеріальної точки в просторі задається її радіус-вектором :

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні вектори (орти); x, y, z — координати точки.

- Кінематичні рівняння траєкторії руху в координатній формі:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t),$$

де t — час.

- Вектор переміщення точки за проміжок часу $[t_1, t_2]$:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}$$

- Миттєва швидкість матеріальної точки:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$$

де $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$ - проекції вектора швидкості на осі системи координат;

- Модуль вектора швидкості:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- Миттєве прискорення матеріальної точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \text{ де}$$

$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}$ - проекції вектора прискорення на осі системи координат;

- Нормальне, тангенціальне та повне прискорення:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}; \quad \vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}; \quad \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

R – радіус кривизни траєкторії.

- Модуль повного прискорення точки:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

- Миттєва швидкість і радіус-вектор точки при довільному русі:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt; \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt.$$

- Шлях, який був пройдений точкою за проміжок часу $[t_1, t_2]$:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)| dt;$$

- Імпульс точки масою m , що рухається зі швидкістю \vec{v} :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- Основне рівняння динаміки руху матеріальної точки:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

- Основне рівняння динаміки для тіла незмінної маси (2 закон Ньютона):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} \quad \text{або} \quad m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}.$$

- Робота сили, що діє на матеріальну точку:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \quad \text{або} \quad A = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt;$$

- Потужність сили, що діє на матеріальну точку:

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x \cdot v_x + F_y \cdot v_y + F_z \cdot v_z;$$

- Кінетична енергія матеріальної точки ($v \ll c$):

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

- Зміна повної механічної енергії системи:

$$\Delta K + \Delta U = A_{\text{тр}} + A_{\text{зовн}}$$

- Зміна потенціальної енергії в полі сил тяжіння Землі:

$$\Delta U = mg\Delta h$$

Приклад виконання роботи.

Дано: $y_1 = x + 5(м)$, $x_A = -4м$, $V_A = 1м/с$

$F = 10Н$, $m = 1кг$, $y_2 = -2м$, $\mu = 0,1$

Розв'язок:

Зобразимо на рис.2 всі діючі на тіло сили:

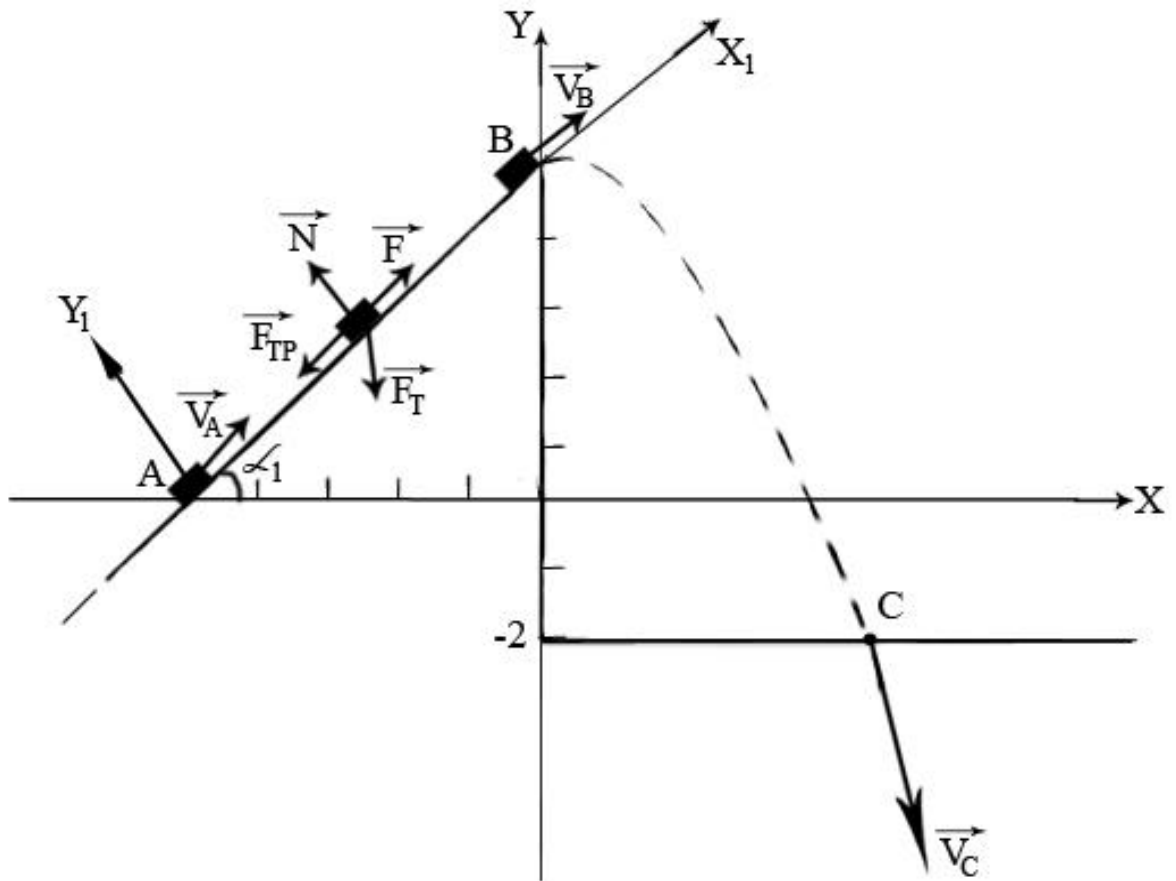


Рис.2

1. Розглянемо рух тіла на проміжку AB.

На тіло діють: сила тяжіння $\vec{F}_T = m\vec{g}$, та сила реакції поверхні \vec{R} . Вводимо допоміжну систему координат X_1AY_1 з початком координат в точці A. При такому виборі системи координат, силу реакції поверхні \vec{R} доцільно розкласти на

нормальну реакцію опору поверхні \vec{N} та силу тертя $F_{mp} = \mu N$, яка спрямована вздовж поверхні в напрямку протилежному руху.

Запишемо проекції другого закону Ньютона

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F} \quad (1.1)$$

на осі системи координат X_1AY_1 :

$$m \frac{dV_{1x}}{dt} = F - \mu N - mg \sin \alpha_1 \quad (1.2)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha_1 \quad (1.3)$$

Знаходячи з рівняння (1.3) нормальну реакцію опори $N = mg \cos \alpha_1$, підставляємо її в (1.2):

$$\frac{dV_{1x}}{dt} = \frac{F}{m} - g \cdot (\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1) \quad (1.4)$$

Кут нахилу площини $y_1(x) = k_1x + b_1$ до горизонтальної осі ОХ знаходимо з кутового коефіцієнту $k_1 = tg \alpha_1 = 1$. Тоді:

$$\alpha_1 = \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$$

Так як $tg \alpha_2 = k_2 = 0$, то друга площина – горизонтальна, тобто $\alpha_2 = 0$.

Виконав інтегрування рівняння (1.4), отримаємо залежність швидкості точки від часу в напрямку AB (вісь X_1):

$$V_{x1}(t) = \left(\frac{F}{m} - g(\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1)\right)t + C_1 \quad (1.5)$$

Інтегруючи в свою чергу рівняння (1.5), знаходимо залежність координати x_1 від часу:

$$x_1(t) = \left(\frac{F}{m} - g(\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1)\right)\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2 \quad (1.6)$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 використовуємо початкові умови задачі (координати і швидкості): $x_1(0) = 0$ м та $V_{x1} = V_A = 1$ м/с.

Складаючи рівняння (1.5) і (1.6) для моменту часу $t=0$, маємо:

$$C_1 = 1 \text{ м/с та } C_2 = 0 \quad (1.7)$$

Знайдемо довжину шляху $l = AB$ вздовж площини $y_1(x)$. Так як координати точок $A(-4;1)$ та $B(0;5)$, то за відомою з геометрії формулою -

$$l = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0+4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32} \approx 5,66 \text{ м} \quad (1.8)$$

Для моменту часу t_l коли тіло покидає похилу площину

$$x_1 = l \text{ та } V_{x1} = V_B$$

Враховуючи (1.7) і (1.8) в рівнянні (1.6), маємо рівняння для моменту часу t_l , коли тіло опиняється в точці B :

$$l = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F}{m} - g \cdot (\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1) \right) \cdot t_1^2 + t_1$$

Підставляємо числові значення всіх величин:

$$\frac{1}{2} (10 - 9,81(\sin \frac{\pi}{4} + 0,1 \cos \frac{\pi}{4})) t_1^2 + t_1 - 5,66 = 0$$

Приводимо рівняння к канонічному вигляду:

$$1,18 t_1^2 + t_1 - 5,66 = 0$$

і знаходимо розв'язки:

$$t_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1,18 \cdot 5,66}}{2 \cdot 1,18} = \frac{-1 \pm 5,27}{2} = \begin{cases} 1,81 \text{ с} \\ -3,14 \text{ с} \end{cases}$$

Оскільки час руху t_l - величина додатна, то $t_1 = 1,81$ с.

Тепер з рівняння (1.5) знаходимо швидкість тіла в т. B :

$$V_B = V_{x1}(t_1) = \left(\frac{10}{1} \cdot 9,81 \cdot (\sin \frac{\pi}{4} + 0,1 \cdot \cos \frac{\pi}{4})\right) \cdot 2,14 = 5,27 \text{ м/с.}$$

2. Розглянемо рух тіла під дією сили тяжіння від точки B до C .

Проекції рівняння руху (1.1) на осі системи координат XOY мають вигляд:

$$\begin{cases} m \frac{dV_x}{dt} = 0 \\ m \frac{dV_y}{dt} = -F_T \end{cases} \quad (1.9)$$

Початкові умови:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ м}; y_0 = b_1 = 5 \text{ м}; \\ V_{x0} = V_B \cos \alpha_1 = 5,07 \cos \frac{\pi}{4} = 3,73 \text{ м/с} \\ V_{y0} = V_B \sin \frac{\pi}{4} = 3,73 \text{ м/с} \end{cases} \quad (1.10)$$

Інтегруємо рівняння (1.9) і отримаємо рівняння для горизонтальної і вертикальної компонент швидкості:

$$\begin{cases} V_x = C_3 \\ V_y = -gt + C_4 \end{cases} \quad (1.11)$$

Інтегруючи (1.11) вдруге, знаходимо залежність координат від часу:

$$\begin{cases} x = C_3 t + C_5 \\ y = -\frac{gt^2}{2} + C_4 t + C_6 \end{cases} \quad (1.12)$$

Для початкового моменту часу вільного падіння ($t = 0$), враховуючи (1.10), маємо:

$$C_3 = V_{x0} = 3,73 \text{ м/с}; C_4 = V_{y0} = 3,73 \text{ м/с}$$

$$C_5 = x_0 = 0 \text{ м}; C_6 = b_1 = 5 \text{ м.}$$

Тоді рівняння (1.11) і (1.12) приймають вигляд:

$$\begin{cases} V_x = V_{x0}; \\ V_y = V_{y0} - gt; \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} x = V_{x0}t \\ y = -\frac{gt^2}{2} + V_{y0}t + b_1 \end{cases} \quad (1.14)$$

В момент падіння в точку C вертикальна координата тіла

$$y_c = y_2 = -2 \text{ м}$$

Враховуючи це, з другого рівняння системи (1.14) знаходимо час вільного падіння t_2 :

$$-2 = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t_2^2 + 3,73 \cdot t_2 + 5$$

$$4,905 \cdot t_2^2 - 3,73 \cdot t_2 - 7 = 0$$

$$t_2 = \frac{3,73 \pm \sqrt{3,73^2 + 4 \cdot 4,905 \cdot 7}}{2 \cdot 4,905} = \frac{3,73 \pm 12,30}{9,81} = 1,63 \text{ с.}$$

Тут врахований тільки додатній корінь (який має фізичний зміст).

Горизонтальну координату падіння знаходимо з першого рівняння (1.14):

$$x_c = V_{x0} \cdot t^2 = 3,73 \cdot 1,63 = 6,08 \text{ м.}$$

Швидкість тіла в точці C

$$V_C = \sqrt{V_{xc}^2 + V_{yc}^2} = \sqrt{V_{x0}^2 + (V_{y0} - gt_2)^2} = \sqrt{3,73^2 + (3,73 - 9,81 \cdot 1,63)^2} = 12,85 \text{ м/с.}$$

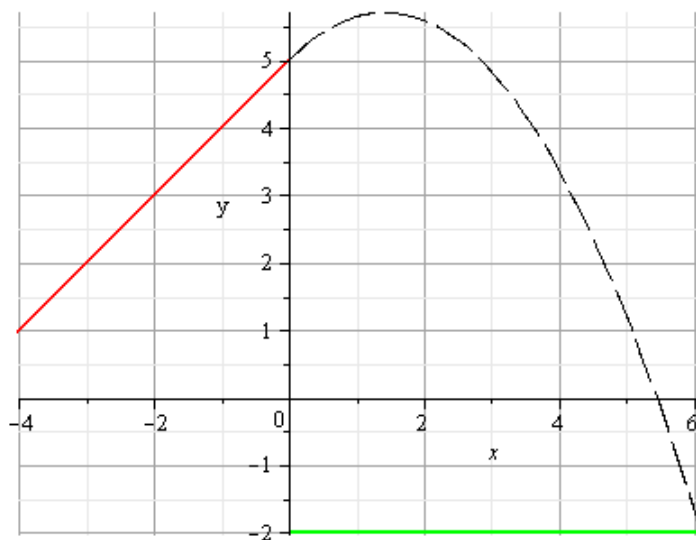
Заносимо всі знайдені величини до таблиці:

m	F	μ	$y_I(x)$	x_A	y_A	l	V_A	t_I	V_B	$y_2(x)$	t_2	x_C	y_C	V_C
1	10	0,1	$x+5$	-4	1	5,66	1	1,81	5,27	-2	1,63	6,08	-2	12,85

3. Рівняння траєкторії руху вільного падіння від точки B до точки C знайдемо виключаючи час t з системи рівнянь (1.14):

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{x}{V_{x0}} \\
 y(x) &= -\frac{g}{2V_{x0}^2} x^2 + \frac{V_{y0}}{V_{x0}} x + b_1 = \\
 &= -\frac{g}{2V_B^2 \cos^2 \alpha_1} + tg \alpha_1 \cdot x + b_1 = \\
 &= -\frac{9,81}{2 \cdot 5,07^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot x^2 + tg \frac{\pi}{4} \cdot x + 5 = \\
 &= -0,35x^2 + x + 5 \text{ м}
 \end{aligned}$$

Побудуємо всі графіки в одній площині:



4.

Перевіримо

отримані результати за допомогою закону збереження енергії:

$$\Delta K + \Delta U = A_{\text{зовн}} + A_{\text{тр}} \quad (1.15)$$

Зміна кінетичної енергії тіла:

$$\begin{aligned}\Delta K &= K_C - K_A = \frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(12,85^2 - 1^2) = 82,06 \text{ Дж}\end{aligned}\tag{1.16}$$

Зміна потенціальної енергії тіла в полі сил тяжіння Землі:

$$\begin{aligned}\Delta U &= mg\Delta h = mg(y_C - y_A) = \\ &= 1 \cdot 9,81 \cdot (-2 - 1) = -29,43 \text{ Дж}\end{aligned}\tag{1.17}$$

Робота зовнішньої сили на відріжку шляху AB :

$$\begin{aligned}A_{\text{зовн}} &= \int_0^l \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot l \cdot \cos 0 = \\ &= 10 \cdot 5,66 = 56,6 \text{ Дж}\end{aligned}\tag{1.18}$$

Робота сили тертя:

$$\begin{aligned}A_{\text{тр}} &= \int_0^l \vec{F}_{\text{тр}} d\vec{r} = F_{\text{тр}} \cdot l \cdot \cos \pi = -\mu mg \cdot \cos \alpha_1 \cdot l = \\ &= -0,1 \cdot 1 \cdot 9,81 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot 5,66 = -3,93 \text{ Дж}\end{aligned}\tag{1.19}$$

Підставляємо (1.16) - (1.19) в закон збереження енергії (1.15):

$$\begin{aligned}82,06 - 29,43 &= 56,6 - 3,93 \\ 52,63 &\approx 52,67\end{aligned}\tag{1.20}$$

Ліва і права частина рівняння (1.20) співпадають в межах похибки, обумовленої округленням результатів при їх обчисленні. Це вказує на те, що задача була розв'язана вірно.

5. Оригінальні висновки, щодо виконання роботи зробити самостійно.

Література.

1. Иродов И.Е. Основные законы механики, М, 2002 (або 1983), Гл. 1-2,4;
2. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики, т. 1, Механіка, К, 2001, Гл. 1-4.
3. Савельев И.В. Курс физики, т.1, М, 1989, Гл. 1-3.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика т.1, М, 1979, Гл. 1-2, 4.

Зміст

стор.

1. <u>Завдання</u>	<u>3</u>
2. <u>Вказівки до виконання роботи</u>	<u>4</u>
3. <u>Варіанти завдань</u>	<u>5</u>
4. <u>Стислі теоретичні відомості</u>	<u>8</u>
5. <u>Приклад виконання завдання</u>	<u>11</u>
6. <u>Література</u>	<u>18</u>
7. <u>Зміст</u>	<u>19</u>